Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

20 januari – 31 januari 2025

Uitwerkingen

A1. A) Minstens een van de kabouters A en B draagt een blauwe muts. Als een kabouter twee andere kabouters ziet met elk een blauwe muts op, dan weet de kabouter dat hij zelf een rode muts op moet hebben, want er zijn maar twee blauwe mutsen. Als een kabouter niet weet welke muts hij zelf op heeft door naar twee andere kabouters te kijken, dan zijn die twee mutsen dus niet allebei blauw. Op die manier weten we dat C en D niet allebei een blauwe muts hebben, dat C en E niet allebei een blauwe muts hebben, en dat D en E niet allebei een blauwe muts hebben. Van de kabouters C, D en E heeft er dus maximaal één een blauwe muts. Dit betekent dat van A en B er minstens één kabouter is met een blauwe muts.

A2. B) 3 Schrijf A voor de ééncijferige leeftijd van Alexa, B voor die van Bente, en C voor die van Charissa. Dan geldt $A < B < C$ en is de leeftijd van vader $\overline{AB}$ (waarmee we het getal bedoelen met de cijfers A en B), die van moeder $\overline{AC}$, en die van opa $\overline{BC}$. De opgave zegt nu dat $\overline{AB} + 32 = \overline{BC}$ en dat $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC} + B$.

Door naar de eenheden in de eerste vergelijking te kijken, zien we dat $B+2 = C$ of $B+2 = 10+C$. Maar in het laatste geval zou $B = 8 + C > C$; tegenspraak. Dus $B + 2 = C$, waardoor we meteen ook vinden dat $A + 3 = B$ door naar de tientallen te kijken.

De tweede vergelijking komt neer op $(10A + B) + (10A + C) = (10B + C) + B$, oftewel $20A+B+C = 10B+B+C$, waaruit volgt dat $B = 2A$. Met $B = A+3$ leidt dit tot $2A = A+3$ en dus $A = 3$ (en $B = 6$ en $C = 8$). Alexa is dus 3 jaar oud.

A3. B) $\frac{1}{3}$ Noem de hoeveelheid bloem die Laura gebruikt voor de muffins m, en de hoeveelheid bloem die Laura gebruikt voor de chocoladecake c. Er geldt dus dat $m + c = T$, waarbij T de totale hoeveelheid bloem (of suiker) is, want Laura gaat niets anders bakken. Verder gebruikt Laura $\frac{1}{2}m$ suiker voor de muffins en $\frac{5}{4}c$ suiker voor de chocoladecake. Omdat ze evenveel bloem als suiker gebruikt, geldt dat $m + c = \frac{1}{2}m + \frac{5}{4}c$. Dat kunnen we omschrijven tot $\frac{1}{2}m = \frac{1}{4}c$ en dus $c = 2m$. In combinatie met $m + c = T$ geeft dit dat $m = \frac{1}{3}T$. Laura gebruikt dus $\frac{1}{3}$ van de totale hoeveelheid bloem voor de muffins.

A4. D) $2022 \cdot 2023 - 1$ Dit antwoord is te vinden door eerst kleine gevallen te bekijken. Merk bijvoorbeeld op dat $1\cdot2\cdot3\cdot4+1 = 25 = 5^2 = (2\cdot3-1)^2$ en dat $2\cdot3\cdot4\cdot5+1 = 121 = 11^2 = (3\cdot4-1)^2$; je kunt bewijzen dat dit patroon zich voortzet. Merk hiervoor op dat

$$\begin{aligned} 2021 \cdot 2024 &= (2022 - 1) \cdot (2023 + 1) \\ &= 2022 \cdot 2023 - 2023 + 2022 - 1 \\ &= 2022 \cdot 2023 - 2. \end{aligned}$$

Noteer $2022 \cdot 2023$ met N. Dan is

$$\begin{aligned} 2021 \cdot 2022 \cdot 2023 \cdot 2024 + 1 &= N(N - 2) + 1 \\ &= N^2 - 2N + 1 \\ &= (N - 1)^2 \\ &= (2022 \cdot 2023 - 1)^2 \end{aligned}$$

Opmerking: Een snelle manier om in te zien dat de andere vier antwoordopties in ieder geval niet goed zijn, is door te kijken naar het laatste cijfer van de uitdrukking in de opgave, dat is een 5. De vijf antwoordopties eindigen respectievelijk op een 2, 3, 7, 5 en 1, en hun kwadraten dus op een 4, 9, 9, 5 en 1. Alleen het kwadraat van $2022 \cdot 2023 - 1$ eindigt dus ook op een 5.

A5. B) 7 We kunnen in twee zetten één hokje omlaag en één hokje naar links komen: zet eerst vier naar links en drie omhoog, en daarna drie naar rechts en vier naar beneden. Doe deze twee zetten drie keer, dan ben je in het punt $(-3, -3)$. Vanuit daar kun je in één zet in het punt $(1, 0)$ komen: vier naar rechts en drie omhoog.

We laten zien dat minder dan zeven zetten niet kan. Van $(0, 0)$ naar $(1, 0)$ moet je evenveel omhoog als omlaag gaan. Dat kan door voor elke zet met 3 omhoog ook een zet met 3 omlaag te doen en voor elke zet met 4 omhoog ook een zet met 4 omlaag te doen. Een andere mogelijkheid is om vier keer 3 omhoog te gaan en drie keer 4 omlaag, of andersom. In het laatste geval heb je minstens zeven zetten nodig (dit gebeurt ook in de oplossing hierboven). Als je dus minder dan zeven zetten wilt gebruiken, dan moet je uitgaan van het eerste geval en dan komen de zetten in paren met evenveel beweging omhoog als omlaag. Ga je 4 omhoog en 4 omlaag, dan verplaats je horizontaal twee keer een afstand van 3. In totaal verplaats je dan een even aantal hokjes (0 of 6). Ga je 3 omhoog en 3 omlaag, dan verplaats je horizontaal 0 of 8 hokjes. Je verplaatst dus horizontaal altijd een even aantal hokjes en kan dan nooit op $(1, 0)$ uitkomen.

In totaal heb je dus minimaal zeven zetten nodig.

A6. D) $18\frac{3}{4}$ Noem de twee rechthoekszijdes a en b. We zijn op zoek naar de oppervlakte van de driehoek, dat is $\frac{1}{2}ab$. De stelling van Pythagoras geeft nu dat $a^2 + b^2 = 11^2$. We weten ook dat $a + b = 25 - 11 = 14$. Dan is

$$14^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 11^2 + 2ab$$

en hieruit volgt dat $2ab = 196 - 121 = 75$. Dus is $\frac{1}{2}ab = \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4}$.

A7. C) 178° Eerst kijken we naar de driehoek EAL. Omdat beide veelhoeken regelmatig zijn, geldt dat $|AE| = |AB| = |AL|$ en dus is EAL een gelijkbenige driehoek. De hoek bij A is gelijk aan de hoek van een regelmatige negenhoek min de hoek van een regelmatige vijfhoek. Omdat je een n-hoek (voor $n \geqslant 3$) kan opdelen in $n - 2$ driehoeken van elk 180°, is de hoek van een regelmatige n-hoek gelijk aan $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$. Voor een vijfhoek is die hoek dus 108 graden en voor een negenhoek 140 graden. De hoek bij A in de driehoek EAL is dus $140 - 108 = 32$ graden. Dit is de top van de gelijkbenige driehoek: de andere twee hoeken zijn dus $\frac{1}{2}(180 - 32) = 74$ graden.

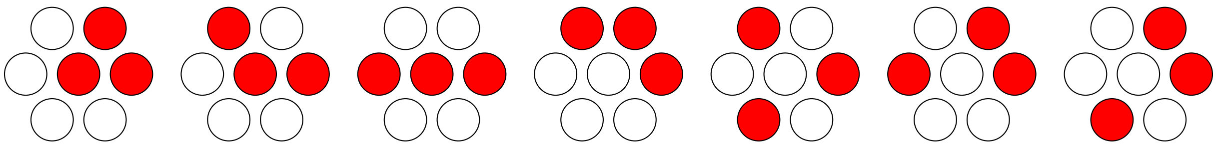
Nu kunnen we de gevraagde hoek uitrekenen: die is gelijk aan 360° min de hoek van de vijfhoek min de hoek die we net berekend hebben, dus $360° - 108° - 74° = 178°$.

A8. D) 1025 Als Babette de afstand tussen twee kruisjes berekent, trekt ze de kleinste waarde bij een kruisje af van de grootste waarde bij een kruisje. Daarna telt ze alles bij elkaar op. Stel Babette zet haar kruisjes bij de getallen $a_1, a_2, \ldots, a_{1001}$ met $a_1 < a_2 < \cdots < a_{1001}$. Voor het kruisje bij a_1 geldt nu dat dit in de uitkomst altijd met een minteken voorkomt: de afstanden tot de andere kruisjes zijn $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{1001} - a_1$. Dit draagt $-1000 \cdot a_1$ bij aan de totale uitkomst. Kijken we nu naar het kruisje bij a_2, dan komt dit getal één keer met een plus en 999 keer met een min in de totale som voor: met een plus in $a_2 - a_1$ en met een min in $a_3 - a_2, a_4 - a_2, \ldots, a_{1001} - a_2$. In totaal draagt dit $-998 \cdot a_2$ bij aan de uitkomst. Als we zo verder gaan, zien we dat de totale som van alle afstanden wordt gegeven door

$$-1000 \cdot a_1 - 998 \cdot a_2 - 996 \cdot a_3 - \cdots - 2 \cdot a_{500} + 0 \cdot a_{501} + 2 \cdot a_{502} + \cdots + 1000 \cdot a_{1001}.$$

Het is duidelijk dat deze uitkomst zo groot mogelijk is als de eerste 500 a_i's zo klein mogelijk zijn en de laatste 500 a_i's zo groot mogelijk. Alleen voor a_{501}, die niet bijdraagt aan de uitkomst, zijn er dan nog 1025 plekken in het midden om te kiezen.

B1. 7 Met systematisch tellen zullen we laten zien dat er zeven opties voor het boeket zijn. Als de middelste roos rood is, dan zitten er 2 rode rozen in de ring eromheen. Daar zitten 0, 1 of 2 witte rozen tussen; dit zijn dus 3 mogelijkheden. Als de middelste roos wit is, dan zitten alle drie de rode rozen in de ring eromheen. Die zitten of alle drie direct naast elkaar, of alle drie juist niet naast elkaar (dus afwisselend een witte en een rode roos in de ring), of er zitten er precies 2 van naast elkaar; de derde roos kan dan nog op twee plekken zitten ten opzichte van de eerste twee. In totaal zijn dit $3 + 4 = 7$ boeketten.

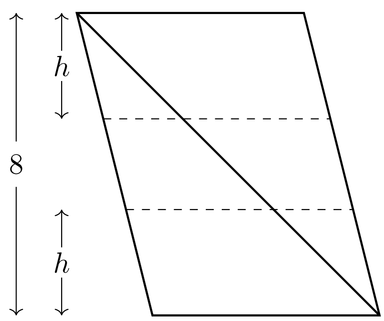


B2. 23 : 57 : 33 Merk op dat de uren altijd beginnen met 0, 1 of 2, en de minuten en seconden met 0, 1, 2, 3, 4 of 5. Dat zijn al vijftien plekken waar cijfers 0 t/m 5 moeten staan, waarvan we er in totaal achttien beschikbaar hebben. Daarnaast geldt dat als we een uur met een 2 beginnen, het volgende cijfer dan ook uit 0 t/m 3 moet komen. Dat willen we in elk geval in het laatste tijdstip wel doen, anders is ons maximale tijdverschil minder dan 20 uur. De twee cijfers uit 0 t/m 5 die nog over zijn, kunnen we het beste in het vroegste tijdstip gebruiken. Het komt er dan zo uit te zien:

$$\begin{array}{c}
00 : 02 : 2X \\
1X : 3X : 3X \\
1X : 4X : 4X \\
1X : 4X : 5X \\
23 : 5X : 5X
\end{array}$$

Merk op dat als we in het vroegste tijdstip een 1 gebruiken in plaats van een 2, één van de middelste tijdstippen met een 2 moet beginnen en daardoor een extra cijfer uit 0 t/m 3 nodig heeft. Dan wordt het vroegste tijdstip minimaal 00 : 06 en dat is later dan hoe het hierboven staat. Het vroegst mogelijke tijdstip is dus 00 : 02 : 26 en het laatst mogelijke tijdstip 23 : 59 : 59. (In de middelste drie tijdstippen maakt de precieze plaatsing van de 3, 4, 5 niet uit.) Hoe we de cijfers 6 t/m 9 verder ook over de X'en verdelen, het geven altijd geldige tijdstippen. Het maximale tijdverschil is dus 23 : 59 : 59 − 00 : 02 : 26 = 23 : 57 : 33.

B3. $3\frac{1}{5}$ We vullen de driehoek aan met een congruente driehoek tot een parallellogram, zoals hiernaast. Net zoals het middelste deel van de driehoek een vijfde deel van de totale driehoek is, is het middelste deel van het parallellogram een vijfde deel van het totale parallellogram. Omdat de oppervlakte van een parallellogram gelijk is aan basis keer hoogte, en de drie stukken van het parallellogram ook een parallellogram zijn met allemaal dezelfde basis, geldt dus dat de middelste hoogte gelijk is aan een vijfde van de totale hoogte. Oftewel, $8 - 2h = \frac{8}{5}$, en oplossen geeft dat $h = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$.



B4. 4, 5, 8, 6 of 5, 4, 8, 6 of 5, 8, 4, 9 of 6, 9, 8, 4 of 7, 8, 9, 6 of 8, 5, 4, 9 of 8, 7, 9, 6 of 9, 6, 8, 4

Als Lydia met drie getallen begint, schrijft ze daarna nog twee andere getallen op. Die twee getallen hebben elk hooguit twee cijfers, dus dan staan er in totaal hooguit zeven cijfers op het bord. Dat zijn er te weinig om alle cijfers van 1 t/m 9 te bevatten. Lydia heeft dus (minstens) vier getallen nodig. Als ze vier getallen gebruikt, dan schrijft ze daarna nog drie getallen op, dus in totaal ten hoogste tien cijfers. Hier kunnen we, met wat puzzelen, een oplossing mee vinden: er zijn acht mogelijke oplossingen, zie hierboven.