Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

22 januari – 2 februari 2024

Uitwerkingen

A1. D) 5 De kwadraten van twee cijfers zijn 16, 25, 36, 49, 64 en 81. We beginnen met elk van deze kwadraten, en kijken welk cijfer we erachter kunnen plakken zodanig dat de laatste twee cijfers ook weer een kwadraat vormen. Bijvoorbeeld: na 16 kan een 4 vanwege 64 (en er kan geen ander cijfer achter de 6), dan komt een 9 die 49 vormt, en daarna houdt het op omdat er geen kwadraat begint met een 9. Met de zes verschillende beginkwadraten maak je maximaal de volgende getallen:

- 1649
- 25
- 3649
- 49
- 649
- 81649

Het grootste getal uit deze lijst, 81649, bestaat uit vijf cijfers.

A2. E) 25 We maken een tabel van hoeveel dagen het wel of niet regent, en hoeveel dagen er wel of geen regen wordt voorspeld en Caitlin dus wel of niet een paraplu meeneemt.

		Regent het? ja	nee
Regen voorspeld?	ja	a	b
	nee	0	c

Het komt nooit voor dat het regent maar dat Caitlin geen paraplu bij zich heeft, daarom staat linksonder een 0. Voor de overige drie getallen geldt dat $a+b+c=31$ (het aantal dagen in oktober), $a+b=16$ (het aantal dagen dat er regen werd voorspeld) en $a+c=21$ (het aantal dagen dat de voorspelling correct was). We zijn op zoek naar $b+c$, het aantal dagen dat het niet regende. Uit $a+b+c=31$ en $a+b=16$ volgt dat $c=15$. In combinatie met $a+c=21$ betekent dit dat $a=6$. Ten slotte is dan $b+c=31-6=25$.

Alternatieve oplossing. Op de $31-16=15$ dagen in oktober dat er geen regen werd verwacht, was de voorspelling blijkbaar correct. Dus van de andere 16 dagen (waarop er wel regen werd verwacht) was de voorspelling maar op $21-15=6$ dagen correct. Het regende dus op precies 6 dagen, dus op $31-6=25$ dagen niet.

A3. C) $\frac{2}{3}$ We berekenen de volgende getallen in deze rij:

- 6;
- 15;
- $\frac{15}{6} \cdot 2 = 5$;
- $\frac{5}{15} \cdot 2 = \frac{2}{3}$;
- $\frac{2}{3} : 5 \cdot 2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{4}{15}$;
- $\frac{4}{15} : \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{4}{5}$;
- $\frac{4}{5} : \frac{4}{15} \cdot 2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{4} \cdot 2 = 6$;
- $6 : \frac{4}{5} \cdot 2 = 6 \cdot \frac{5}{4} \cdot 2 = 15$;
- ...

We zien dat de rij periodiek is: dezelfde zes getallen herhalen zich steeds. Het eerste getal is een 6, het zevende getal is een 6, ..., het 97ste getal is een 6. Het honderdste getal is dus $\frac{2}{3}$.

A4. E) 5 We maken de vakjes van het 3×3-rooster afwisselend grijs en wit en geven elk vakje een letter, zie de figuur hiernaast. Een slang slingert altijd om en om tussen de witte en grijze vakjes, en daarbij komt om en om een even en oneven getal. Omdat er vijf oneven getallen zijn en vijf witte vakjes, komen de oneven getallen op de witte vakjes, op plekken a, c, e, g en i. We berekenen de totaalscore van dit rooster als volgt:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$\begin{aligned}(b+d)+(a+e+c)+(b+f)+(a+e+g)+(b+d+f+h)\\ +(c+e+i)+(d+h)+(e+g+i)+(f+h)\\ =2(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+(b+d+f+h)+2e\end{aligned}$$

Dit is gelijk aan twee keer de som van alle getallen, plus de som van alle even getallen, plus twee keer e. De eerste twee termen zijn voor elke slang hetzelfde. De totaalscore van het rooster hangt dus alleen af van het getal dat op plek e komt te staan. Dat is een oneven getal, zoals we al zagen, en daar zijn vijf mogelijkheden voor. Hieronder zien we voorbeelden waaruit blijkt dat elk oneven getal ook daadwerkelijk in het midden kan belanden.

5	4	3
6	1	2
7	8	9

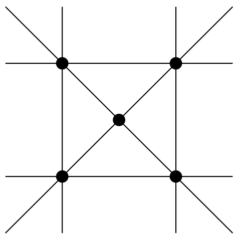
1	2	9
4	3	8
5	6	7

1	2	3
6	5	4
7	8	9

1	2	3
8	7	4
9	6	5

1	2	3
8	9	4
7	6	5

A5. D) 6 We kunnen 6 lijnen als volgt krijgen. We nemen de verlengde zijden van een vierkant samen met de twee diagonalen. De 5 punten zijn nu de vier hoekpunten van het vierkant en het midden, zie ook de figuur hiernaast.



We zullen laten zien dat 7 (of meer) lijnen niet mogelijk zijn. Dat doen we uit het ongerijmde: neem aan dat een situatie met 7 lijnen wel bestaat. In het algemeen snijden 7 lijnen elkaar in $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ punten, maar er zijn twee redenen waardoor er minder kunnen zijn.

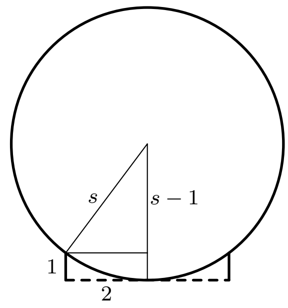
Ten eerste kunnen lijnen evenwijdig zijn, waardoor ze elkaar niet snijden. Omdat elke lijn ten minste 2 van de 5 punten moet bevatten, is het niet mogelijk dat er 3 lijnen evenwijdig zijn (want dan zouden er $3 \cdot 2 = 6$ punten nodig zijn). Van de 7 lijnen zijn er dus hooguit 3 paren die evenwijdig zijn, en dus hooguit 3 snijpunten minder door evenwijdigheid. Hierdoor blijven er ten minste $21 - 3 = 18$ snijpunten over.

Ten tweede kunnen snijpunten samenvallen. Dit gebeurt als er meer dan twee lijnen door één punt gaan. Als er 3 lijnen door één punt gaan, vallen er 3 snijpunten samen. Als er 4 lijnen door één punt gaan, vallen er 6 snijpunten samen, enzovoorts. De minstens 18 overgebleven snijpunten moeten samenvallen in de 5 punten waarmee we begonnen. Dat betekent dat er een punt, zeg P, is waarin minstens 4 snijpunten samenvallen (want $5 \cdot 3 = 15 < 18$). Door dat punt gaan er dus ten minste 4 verschillende lijnen, zeg ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 en ℓ_4.

Op elk van die 4 lijnen moet nog een ander van de 5 punten liggen, zeg punten P_1, P_2, P_3 en P_4. Deze punten kunnen niet samenvallen. Omdat we nu alle 5 punten al gevonden hebben, kan er geen vijfde lijn zijn die door het punt P gaat. Elk van de overige 3 lijnen snijdt ten minste 3 van de lijnen ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 en ℓ_4 (omdat hij met hooguit één van die lijnen evenwijdig is). Dat betekent dat de overige lijnen ten minste 3 van de punten P_1, P_2, P_3 en P_4 moeten bevatten. Hieruit volgt echter dat de 3 overige lijnen allemaal dezelfde lijn zijn, wat een tegenspraak is.

We concluderen dat 7 (of meer) lijnen niet mogelijk zijn en dat 6 het maximale aantal lijnen is.

A6. B) $2\frac{1}{2}$ We tekenen een hulplijn van het middelpunt van het balletje naar de rand van de houder, en van het middelpunt van het balletje naar de tafel. Ook tekenen we een lijn evenwijdig aan de tafel. We zijn op zoek naar s, de straal van het balletje.



We zien een rechthoekige driehoek met rechthoekszijdes 2 en $s-1$ en schuine zijde s. De stelling van Pythagoras geeft dat $2^2+(s-1)^2=s^2$. Uitwerken geeft $4+s^2-2s+1=s^2$, oftewel $2s=5$. Dus $s=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$.

A7. C) Er bestaan geen $a>0$ en $b>0$ met $a+b<a\cdot b<\frac{a}{b}$. We zullen laten zien dat er geen $a>0$ en $b>0$ bestaan zodat $a+b<a\cdot b<\frac{a}{b}$. Uit de tweede ongelijkheid volgt dat $a\cdot b^2<a$, oftewel $b^2<1$. Hieruit volgt dat $b<1$. Maar dan zien we dat $a\cdot b<a\cdot 1=a$, terwijl $a+b>a+0=a$, wat een tegenspraak geeft met $a+b<a\cdot b$.
Voor de volledigheid laten we ook zien dat er voor de andere opties A), B) en D) wel $a>0$ en $b>0$ bestaan met de gewenste eigenschap. Voor A) kun je $a=\frac{2}{3}$ en $b=\frac{2}{3}$ nemen; dan krijg je $\frac{4}{9}<1<\frac{4}{3}$. Voor B) kun je $a=1$ en $b=\frac{1}{2}$ nemen; dan krijg je $\frac{1}{2}<\frac{3}{2}<2$. Voor D) kun je ten slotte $a=\frac{1}{2}$ en $b=2$ nemen; dan krijg je $\frac{1}{4}<1<\frac{5}{2}$.

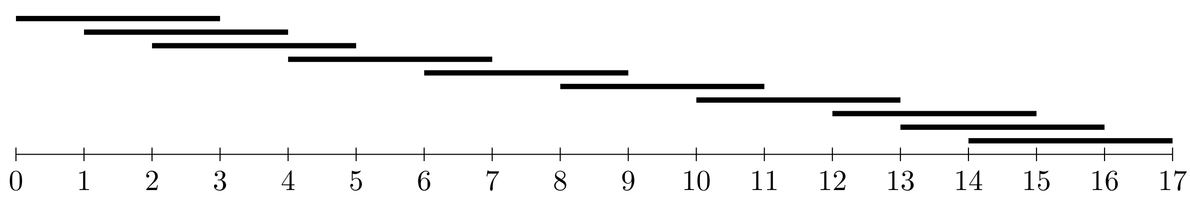
Er zijn ook andere paren (a,b) die je kunt gebruiken om opties A), B) en D) uit te sluiten.

A8. D) 17 Merk allereerst op dat er aan het begin van elk uur wel iets moet gebeuren; er moet ofwel een kaars aangestoken worden ofwel een kaars uitgaan (of allebei). Omdat er 10 kaarsen zijn, zijn dit 20 gebeurtenissen. Dit proces kan dus hooguit 19 uur duren. Het is echter zo dat in de eerste 5 uren (dus in de eerste zes gebeurtenissen) een moment moet zijn waarin er twee gebeurtenissen tegelijkertijd zijn. We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Stel dat elk uur precies één gebeurtenis plaatsvindt. Op $t=0$ steekt Birgit een kaars aan. Op $t=1$ en $t=2$ heeft ze geen andere keus dan een tweede en derde kaars aan te steken. Op $t=3$ gaat de eerste kaars uit, dus doet Birgit verder niets. Op $t=4$ en $t=5$ gaan de tweede en de derde kaars uit, dus Birgit steekt nog steeds geen nieuwe kaars aan. Tussen $t=5$ en $t=6$ brandt nu geen enkele kaars, maar dat is in tegenspraak met de gegevens in de opgave.

Hetzelfde argument kan gebruikt worden om te laten zien dat er ook in de laatste 5 uren een moment moet zijn met twee gebeurtenissen tegelijkertijd. Dat betekent dat er dus twee momenten zijn met twee gebeurtenissen tegelijk. Het proces kan dus hooguit 17 uren duren.

Onderstaand schema toont aan dat het daadwerkelijk mogelijk is in 17 uur. Iedere horizontale streep staat voor de drie branduren van een kaars. Merk op dat er elk uur maar één gebeurtenis is, behalve op $t=4$ en op $t=13$, wanneer er zowel een kaars uit gaat als wordt aangestoken.



B1. 400 Noem het aantal kilometer van de gehele route r. Dan is de afstand van het huis van de familie Janssen naar de tussenstop gelijk aan $\frac{1}{2}r$. Dit is ook gelijk aan 150 kilometer plus een vijfde van de afstand van de grens tot de eindbestemming, dat is $150+\frac{1}{5}(r-150)$. We vinden dat $\frac{1}{2}r=150+\frac{1}{5}(r-150)$. Oplossen van deze vergelijking geeft $r=400$.

B2. 21 Er zijn 16 leerlingen en $2^4=16$ mogelijkheden van welke vragen je goed kan hebben. Omdat dit hetzelfde is en iedereen een ander puntenaantal heeft, moet iedere combinatie van vragen een ander puntenaantal waard zijn. In het bijzonder is elke vraag een ander aantal punten waard. We gaan nu systematisch proberen hoeveel punten de vraag waard kan zijn waarvoor je de minste punten krijgt.

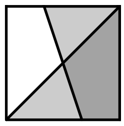
Stel dat deze vraag 1 punt waard is. Dan is de vraag waar je de meeste punten voor krijgt, 5 punten waard. Er zijn dan minimaal 0 en maximaal $1+3+4+5=13$ punten te verdienen voor de hele toets, dus maximaal 14 mogelijke puntenaantallen. Maar we hebben minimaal 16 mogelijke puntenaantallen nodig, dus dit kan niet.

Stel dat de vraag waarvoor je de minste punten krijgt, 2 punten waard is. Dan is de vraag waar je de meeste punten voor krijgt, 6 punten waard. Er zijn drie mogelijke opties voor het aantal punten per vraag: $2,3,4,6$ of $2,3,5,6$ of $2,4,5,6$. De tweede optie kan niet, omdat de leerling die de vragen voor 2 en 3 punten goed had, net zoveel punten heeft als de leerling die alleen de vraag voor 5 punten goed had. Om een vergelijkbare reden kunnen de eerste en laatste optie niet: dan zou de leerling die de vragen voor 2 en 4 punten goed had, net zoveel punten hebben als de leerling die alleen de vraag voor 6 punten goed had.

We kijken daarom wat er gebeurt als de vraag waarvoor je de minste punten krijgt, 3 punten waard is, en de vraag waarvoor je de meeste punten krijgt, 7 punten. Er kan geen vraag zijn die 4 punten waard is, want dan zou de leerling die de vragen voor 3 en 4 punten goed had, net zoveel punten hebben als de leerling die alleen de vraag voor 7 punten goed had. Dus de vier vragen zijn 3, 5, 6 en 7 punten waard en we kunnen controleren dat alle mogelijke combinaties van nul, één, twee, drie en vier vragen goed, verschillende puntenaantallen opleveren. Floor had dus minstens $3+5+6+7=21$ punten op de toets.

B3. $\frac{1}{6}$ Het donkergrijze gebied, plus de twee lichtgrijze driehoekjes links- en rechtsonder, vormen samen een driehoek die precies $\frac{1}{4}$ deel van het vierkant is. Om de oppervlakte van het donkergrijze deel te bepalen, hebben we dus de oppervlakte van deze kleine lichtgrijze driehoekjes nodig. De basis van zo'n driehoekje is $\frac{1}{3}$.

Voor de hoogte kijken we naar het kwartvierkant linksonder in het plaatje, zie de figuur hiernaast. Daar zie je twee congruente lichtgrijze driehoekjes: hun hoogte is dus de helft van de hoogte van de figuur, dat is een kwart van het oorspronkelijke vierkant.



De oppervlakte van een lichtgrijs driehoekje is dus $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$. Hieruit volgt dat de oppervlakte van het donkergrijze gebied gelijk is aan $\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{6}$.

B4. 10 Stel, uit een kraan stroomt v liter water per minuut en het bad loopt leeg met w liter per minuut als de kranen uit staan. Neem aan dat het bad b liter water kan bevatten. We willen weten hoe lang het duurt tot een vol bad leegloopt, dat is $\frac{b}{w}$.

Op maandag loopt het bad eerst vol met v liter per minuut, en daarna leeg met $w-v$ liter per minuut. Samen duurt dit $\frac{b}{v}+\frac{b}{w-v}$ minuten. Op dinsdag loopt het bad eerst vol met $2v$ liter per minuut, en daarna leeg met $w-2v$ liter per minuut. Dat duurt even lang als op maandag. Samen geeft dit de vergelijking

$$\frac{b}{v}+\frac{b}{w-v}=\frac{b}{2v}+\frac{b}{w-2v}.$$

Gelijknamig maken van de breuken, kruislings vermenigvuldigen en vereenvoudigen levert op dat $w=3v$. (Je kunt dit makkelijk controleren door het in de vergelijking hierboven in te vullen.) Oftewel, het leeglopen van het bad gaat drie keer zo snel als het vollopen met één kraan.

Ten slotte maken we gebruik van het gegeven dat Pjotr allebei de dagen 45 minuten bezig is geweest. Vullen we $v=\frac{1}{3}w$ in in de formule voor maandag, dan vinden we

$$45=\frac{b}{v}+\frac{b}{w-v}=\frac{b}{\frac{1}{3}w}+\frac{b}{\frac{2}{3}w}=\frac{9}{2}\cdot\frac{b}{w}.$$

Hieruit volgt dat $\frac{b}{w}=10$.